

1.

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче максимизации функции

$$\min \left[\frac{x_1}{2} + 3, x_2 + 5, x_3 + 8, \frac{x_4}{2} + 32 \right]$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23, \quad x_i \geq 0, \quad x_i - \text{целые}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

[https://vk.com/doc163805014_585650365?
hash=765dda951ebd38e9c0&dl=a368df75cd77fb8ced](https://vk.com/doc163805014_585650365?hash=765dda951ebd38e9c0&dl=a368df75cd77fb8ced)

2.

3. Доказать, что смешанные стратегии $\varphi^0 = (2/3)I_0 + (1/3)I_1$ и $\psi^0 = (2/3)I_0 + (1/3)I_1$ являются оптимальными в игре

$$F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y, \quad X = [0, 1], Y = [0, 1].$$

Найти значение игры v .

[https://vk.com/doc163805014_585650237?
hash=c662fb9c42c7192890&dl=5b990c28ab9dccdd85](https://vk.com/doc163805014_585650237?hash=c662fb9c42c7192890&dl=5b990c28ab9dccdd85)

3.

3. Решить игру Γ_1 для игры Γ с функциями выигрыша

$$F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y, \quad G(x, y) \equiv 1, \quad X = [0, 1], Y = [0, 1].$$

[https://vk.com/doc163805014_585650238?](https://vk.com/doc163805014_585650238?hash=9d79f263504a8ede3b&dl=b0294e2211d73ef035)

[hash=9d79f263504a8ede3b&dl=b0294e2211d73ef035](https://vk.com/doc163805014_585650238?hash=9d79f263504a8ede3b&dl=b0294e2211d73ef035)

№3 Решить Γ_1 для Γ с функ. выигрыша

$$F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y$$

$$X = [0, 1], Y = [0, 1]$$

$$G(x, y) \equiv 1$$

$$F''_{xx} > 0 \quad \text{всп. } \cup_x$$

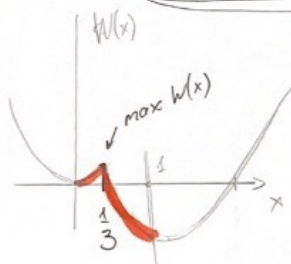
$$G''_{yy} = 0 \quad \text{всп. вогнута}$$

$$Y(x) = \operatorname{Argmax}_y G(x, y) = [0, 1]$$

$$W(x) = \min_{y \in [0, 1]} F(x, y) = \begin{cases} F''_{yy} < 0 \end{cases} \bigcap \begin{cases} \min_{y \in [0, 1]} F(x, y) \end{cases} = \min \{ F(x, 0), F(x, 1) \}$$

$$F_1 = \sup_x W(x) = \max_{x \in [0, 1]} W(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ x^2 - 3x + 1 & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ x^2 - 3x + 1 & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$F_1 = \max_{x \in [0, 1]} W(x) = \frac{1}{9}$$

$$x^2 = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow$$

$$-3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$W(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Отб

$$x^0 = \frac{1}{3}$$

$$F_1 = \frac{1}{9}$$

$$y^0 = 1$$

4.

3. Пусть $i \in \{1, 2\}$ – контролируемый фактор, $j \in \{1, 2\}$ – стратегия противника, $k \in \{1, 2\}$ – случайный фактор, принимающий значения 1 и 2 с вероятностью $1/2$. Критерий эффективности $F(i, j, k)$ задается двумя матрицами

$$(F(i, j, 1)) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, (F(i, j, 2)) = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Оперирующая сторона будет иметь информацию о неопределенном и случайном факторе в начале операции, противник не знает реализации случайного фактора. Найти наилучший гарантированный результат и все оптимальные стратегии оперирующей стороны.

**[https://vk.com/doc163805014_585650238?
hash=9d79f263504a8ede3b&dl=b0294e2211d73ef035](https://vk.com/doc163805014_585650238?hash=9d79f263504a8ede3b&dl=b0294e2211d73ef035)**

5.

3. Найти все ситуации равновесия в чистых и смешанных стратегиях биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**[https://vk.com/doc163805014_585650362?
hash=13df4e21793c6b6bc2&dl=7da9f404e6570eb7d2](https://vk.com/doc163805014_585650362?hash=13df4e21793c6b6bc2&dl=7da9f404e6570eb7d2)**

Пример 10.2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

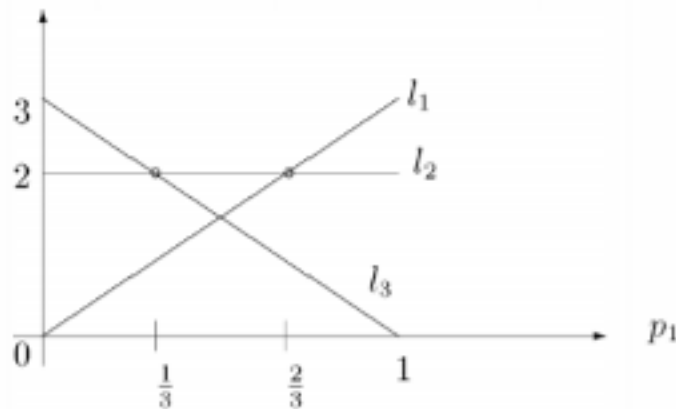


Рис. 10.2

Здесь $l_1(p_1) = 3p_1$, $l_2(p_1) \equiv 2$, $l_3(p_1) = 3(1 - p_1)$. Первая точка верхней огибающей (пересечение прямых l_2 и l_3 на рис. 10.2) имеет абсциссу

$p_1^0 = 1/3$. Рассмотрим систему уравнений из 10.1

$$4q^* + 5(1 - q^*) = v_1, \quad 2q^* + (1 - q^*) = v_1.$$

Из нее находим $q^* = 2 > 1$, что невозможно. Переходим ко второй точке огибающей, лежащей на пересечении прямых l_1 и l_2 . Она имеет абсциссу $p_1^0 = 2/3$. Система

$$2q^* + 4(1 - q^*) = v_1, \quad 4q^* + 2(1 - q^*) = v_1$$

имеет решение $q^* = 1/2$, $v_1 = 3$. Поэтому

$$(p^0, q^0) = ((2/3, 1/3), (1/2, 1/2, 0))$$

— искомая ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

6.

2. Найти все ситуации в чистых стратегиях, оптимальные по Парето в биматричной игре

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 7 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[https://vk.com/doc163805014_585650362?
hash=13df4e21793c6b6bc2&dl=7da9f404e6570eb7d2](https://vk.com/doc163805014_585650362?hash=13df4e21793c6b6bc2&dl=7da9f404e6570eb7d2)

7.

[https://vk.com/doc163805014_585650372?
hash=b802936db46f6c1cec&dl=59a6ede33ff6d48462](https://vk.com/doc163805014_585650372?hash=b802936db46f6c1cec&dl=59a6ede33ff6d48462)

[https://vk.com/doc163805014_585984341?
hash=4ccee5904b4774f84a&dl=20d449fd2b4f01cb39](https://vk.com/doc163805014_585984341?hash=4ccee5904b4774f84a&dl=20d449fd2b4f01cb39)

8.

2. Решить игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

[https://vk.com/doc163805014_585650485?
hash=3493efa3a638569813&dl=c6e182b9b06e19d3ca](https://vk.com/doc163805014_585650485?hash=3493efa3a638569813&dl=c6e182b9b06e19d3ca)

9.

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче минимизации функции

$$\frac{x_1^2}{8} - 2x_1 + \frac{x_2^2}{4} - 5x_2 + \frac{x_3^2}{2} - 7x_3 + \frac{x_4^2}{8} - 8x_4$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29, \quad x_i \geq 0, \quad x_i - \text{целые}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

[https://vk.com/doc163805014_585650252?
hash=3d27a644f388f3d830&dl=c2abda1d79cf60223e](https://vk.com/doc163805014_585650252?hash=3d27a644f388f3d830&dl=c2abda1d79cf60223e)

[https://vk.com/doc163805014_585650254?
hash=1f3db327001d7ac4b9&dl=22758df44e3543d616](https://vk.com/doc163805014_585650254?hash=1f3db327001d7ac4b9&dl=22758df44e3543d616)

10.

3. Рассмотрим следующую одношаговую игру с полной информацией. Сначала второй игрок выбирает $y \in Y = [0, 1]$, затем первый игрок, зная y , выбирает $x \in X = [0, 1]$. Выигрыш первого игрока определяется по функции $F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y$. Найти значение игры и все оптимальные стратегии игроков.

[https://vk.com/doc163805014_585650237?
hash=c662fb9c42c7192890&dl=5b990c28ab9dccdd85](https://vk.com/doc163805014_585650237?hash=c662fb9c42c7192890&dl=5b990c28ab9dccdd85)

11.

3. Найти нижнее значение и максиминную стратегию в игре

$$F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y, \quad X = [0, 1], Y = [0, 1].$$



1:01:00

12.

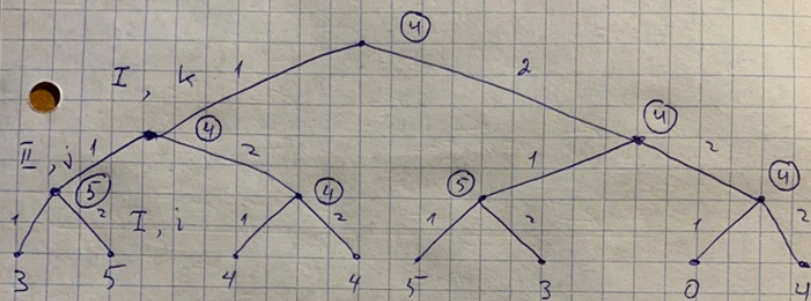
3. Даны две матрицы $A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Рассмотрим следующую игру с полной информацией. Сначала первый игрок выбирает номер матрицы $k \in \{1, 2\}$. Затем второй игрок выбирает номер столбца j матрицы A^k , а потом первый, зная j , выбирает номер строки i матрицы A^k . Выигрыш первого при этом равен a_{ij}^k . Найти значение игры и все оптимальные стратегии игроков.

**В ответ
добавляем еще
(2,2) (2,1)**

Билет 6.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$k \in \{1, 2\} \rightarrow j \rightarrow i$$



$$F(k, j, i) = a_{ij}^k$$

$$F(k, j) = \max_{i \in \{1, 2\}} F(k, j, i)$$

$$F(k) = \min_{j \in \{1, 2\}} F(k, j)$$

$$v = \max_{k \in \{1, 2\}} F(k) = F(k^0)$$

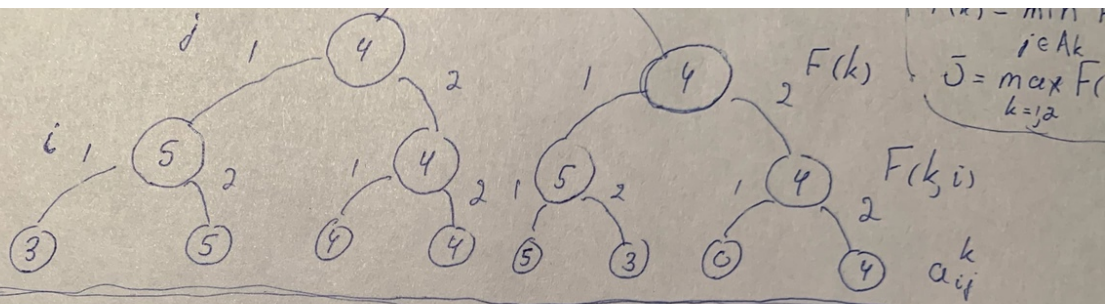
$$k^0 = \{1, 2\}$$

$$i^0(1, 2) = \{1, 2\}; \quad i^0(2, 2) = \{2\}$$

$$j(1) = 2, \quad j(2) = 2$$

Первый игрок, стратегии вида $(k, i(k, j))$: $(1, 1)$, $(1, 2)$

Второй игрок, стратегии вида $j(k)$: 2



$\Rightarrow \bar{D} = 4$

$(k_0, \tilde{i}_0(k, j))$

$(\tilde{j}_0(k))$

$k_0 = 1, 2$

$$\tilde{i}_0(k, j) = \begin{cases} 2, & k=1, j=1 \\ 1, 2, & k=1, j=2 \\ 1, & k=2, j=1 \\ 2, & k=2, j=2 \end{cases}$$

$$\tilde{j}_0(k) = \begin{cases} 2, & k=1 \\ 2, & k=2 \end{cases}$$

14.

3. Решить игру Γ_2 для игры Γ с функциями выигрыша

$$F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y, \quad G(x, y) \equiv 1, \quad X = [0, 1], Y = [0, 1].$$



<https://www.youtube.com/watch?t=840&v=VtgoIX0dPjo&feature=youtu.be>

14.00 - матричная

27.27 – обычная

15.

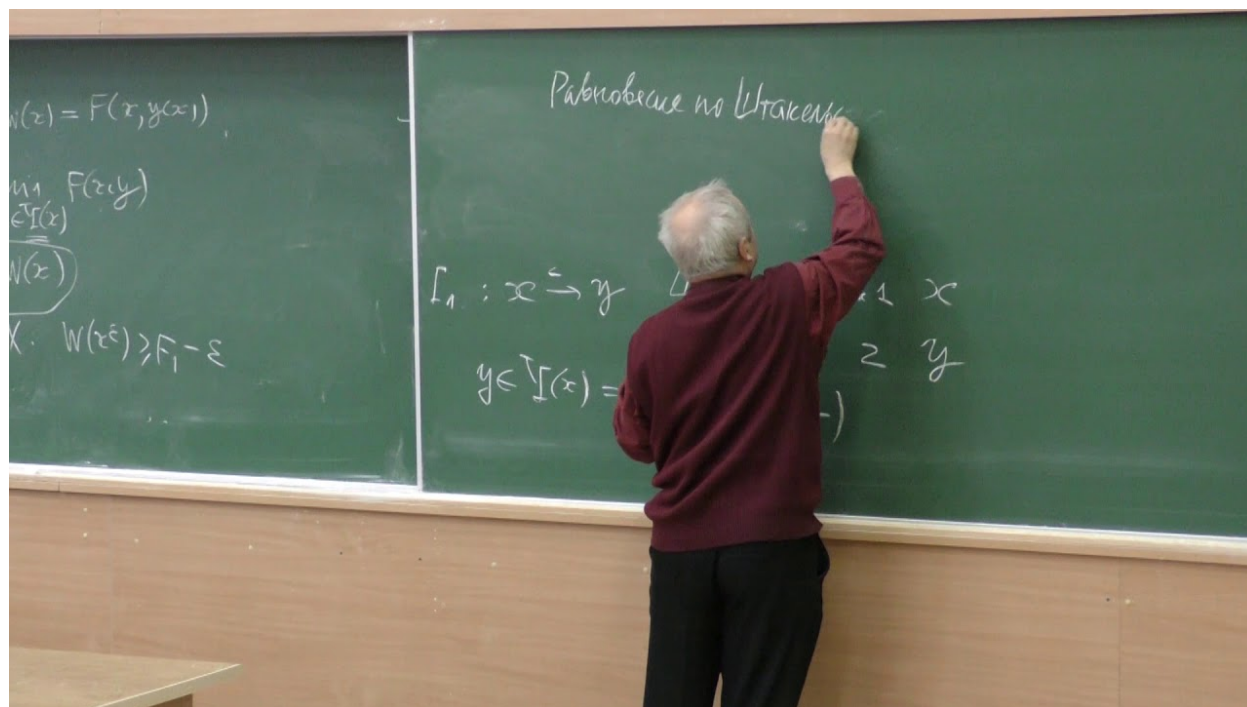
3. Найти равновесие по Штакельбергу для игры Γ с функциями выигрыша

$$F(x, y) = -2x^2 + xy - 4y^2 + 2x + y, \quad G(x, y) = -2x^2 + 4xy + y^2 - x + y,$$

$$X = [-3, 1], \quad Y = [-2, 2].$$

[https://vk.com/doc163805014_585650238?](https://vk.com/doc163805014_585650238?hash=9d79f263504a8ede3b&dl=b0294e2211d73ef035)

[hash=9d79f263504a8ede3b&dl=b0294e2211d73ef035](https://vk.com/doc163805014_585650238?hash=9d79f263504a8ede3b&dl=b0294e2211d73ef035)



16.

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче максимизации функции

$$\ln(x_1 + 2) + \ln(x_2 + 25/2) + \ln(x_3 + 49/2) + \ln(x_4 + 32)$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29, \quad x_i \geq 0, \quad x_i - \text{целые}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

**[https://vk.com/doc163805014_585650252?
hash=3d27a644f388f3d830&dl=c2abda1d79cf60223e](https://vk.com/doc163805014_585650252?hash=3d27a644f388f3d830&dl=c2abda1d79cf60223e)**

18.

2. Найти все равновесия по Штакельбергу для биматричной игры с $n \times n$ -матрицами

$$A = (a_{ij}), a_{ij} = i - j, B = (b_{ij}), b_{ij} = \begin{cases} 1, & i \leq j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -n+1 \\ \boxed{n-1} & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$W'(i^0) = \max_{1 \leq j \leq n} W'(i) = F' \quad (i^0, j^0)$$

$$W'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \text{Arg max}_{1 \leq j \leq n} b_{ij}$$

$$Y(1) = \{1\} \quad W'(1) = 0$$

$$Y(2) = \{1, 2\} \quad W'(2) = 1$$

$$Y(n) = \{1, 2, \dots, n\} \quad \underline{W'(n) = n-1}$$

$\max_{1 \leq i \leq n}$

$n=3$:

$i \backslash j$	1	2	3
1	0	-1	-2
2	1	0	-1
3	2	1	0

1	0	0
1	1	0
1	1	1

$$F'(i^0, j^0) = F(n, 1) - \text{левый минимальный выигрыш}$$

19.

2. На столе лежат n спичек. Игроки по очереди (начиная с первого игрока) берут одну, две или три спички. Кто забирает последние спички, тот выигрывает. Пусть $n = 50$. Кто из игроков выигрывает? Укажите его оптимальную стратегию.

Другой вариант. Если после выбора числа сумма достигает 60, то игрок выигрывает.

$$S = 59, 58, 57, 56, 55, 54, \quad , 49, 48, \dots$$

+ + + + + - + -

$60 = 6 \cdot 10$. Выигрывает второй.

Он дополняет выбор первого до 6.

$$6, 12, \dots, 54, 60.$$

Одноэтаповая игра с полной информацией.

$$x \in X, y \in Y \quad F(x, y).$$

Первый выбирает x , второй y , зная x .

$$v = \underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} F(x^0, y)$$

$$y(x): \min_{y \in Y} F(x, y) = F(x, y(x)).$$